

---

# Determinação do modelo geoidal a partir da integral de Stokes por métodos computacionais

## *Determination of the geoidal model from the integral of Stokes by computational methods*

### **Roberto Paulo Barbosa Ramos**

Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) – *Campus* Belém. Doutor em Engenharia pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). **Endereço:** Rodovia Augusto Montenegro, 4100. Condomínio Cedro. Bloco M, apto 505. Bairro: Parque Verde, Belém, Pará, Brasil. CEP: 66.635-110. **E-mail:** roberto.ramos@ifpa.edu.br.

### **Emiliane Advíncula Malheiros**

Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) – *Campus* Belém. Doutora em Engenharia pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

### **Vítor Abner Borges Dutra**

Discente do Curso Técnico em Agrimensura no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) – *Campus* Belém. Doutorando em Ciências Ambientais pela Universidade Federal do Pará (UFPA) – *Campus* Belém.

### **Lucas Costa de Souza**

Discente do Curso Técnico em Agrimensura no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) – *Campus* Belém. Graduando em Tecnologia em Geoprocessamento pela UFPA – *Campus* Ananindeua.

---

## **RESUMO**

O geóide é comumente utilizado como referencial altimétrico e é usado para a representação da topografia terrestre e do mar. O conhecimento das ondulações ou deformações geoidais pode contribuir para a definição das estruturas geodinâmicas, como por exemplo, as observações das anomalias geoidais que podem fornecer uma importante injunção para o modelamento e análise das propriedades da litosfera continental e oceânica e da atmosfera. Assim, o objetivo deste trabalho é fazer um estudo da ondulação do geóide a partir da integral de Stokes em função das anomalias da gravidade e das componentes do desvio da vertical obtidas pelas fórmulas de Vening-Meinesz que utilizam os polinômios de Legendre para a solução da integral de Stokes.

**Palavras-chave:** Modelo geoidal. Integral de Stokes. Método computacional.

## **ABSTRACT**

*The geoid is commonly used as an altimetric reference and is used to represent land and sea topography. The knowledge of undulations or geoidal deformations can contribute to the definition of geodynamic structures, such as the observations of geoidal anomalies that can provide an important injunction for the modeling and analysis of the properties of the continental and oceanic lithosphere and the atmosphere. Thus, the objective of this work is to study the undulation of the geoid from the Stokes integral as a function of gravity anomalies and the components of deviation from the vertical obtained by the Vening-Meinesz formulas that use Legendre polynomials to solve the integral from Stokes.*

**Keywords:** Geoidal model. Stokes integral. Computational method.

## INTRODUÇÃO

Quase todas as observações do tipo geodésico dependem fundamentalmente do campo da gravidade. Quando estas observações tomam uma distância relativamente pequena entre elas, de forma que se pode tomar o discreto pelo contínuo, então se pode resolver um problema de contorno. As incógnitas deste problema são: o campo da gravidade e a superfície física da Terra. Fica expressa assim o problema da Geodésia Física: a determinação da superfície física da Terra e o seu campo gravitacional externo (CATALÃO, 2000).

De acordo com o mesmo autor, esta determinação torna-se possível tomando uma superfície estável próxima da superfície topográfica, de tal forma que sobre essa superfície se conheça o campo da gravidade. O termo “próxima” sugerido acima é entendido de forma que as oscilações entre a superfície física e a superfície topográfica, no espaço e no tempo, são tais que produzem sobre a superfície física variações do campo menores que os erros de observação, ou variações menores que a precisão com que se pretende conhecer o campo da gravidade, de modo que as hipóteses de que o campo não tenha massas externas à superfície física e seja estacionário. Esses itens são contemplados pela definição de superfície geoidal, com a diferença única de que as massas externas ao geoide não são desprezíveis e as observações da gravidade não são

feitas sobre o geoide. Uma solução para este problema consiste na remoção das massas externas ao geoide. Esta solução é contemplada na aplicação da fórmula de Stokes.

A fórmula de Stokes foi publicada em 1849 e leva o nome de seu autor. George Gabriel Stokes deduziu a fórmula, que também é chamada de integral de Stokes (SJÖBERG, 1994). A integral de Stokes é a fórmula mais importante da Geodésia Física, pois torna possível a determinação do geoide a partir de dados gravimétricos. A função  $S(\Psi)$  é conhecida como função de Stokes (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005). De acordo com estes autores, a expressão que define o potencial anômalo ou potencial perturbador, deduzida por Pizzetti em 1911 e mais tarde por Vening-Meinesz em 1928, permite calcular o potencial anômalo  $T$  em qualquer ponto fora da Terra. Dividindo o potencial anômalo  $T$  pela gravidade da Terra normal no ponto  $P$ , obtém-se a separação entre a superfície geopotencial e a correspondente superfície esferopotencial.

O objetivo desta pesquisa é construir modelos computacionais do geoide a partir da integral Stokes com a finalidade de entender a conexão entre modelo físico e o modelo matemático da terra.

## MATERIAIS E MÉTODOS

As determinações relativas da gravidade, que foram simplificadas com o advento dos gravímetros, permitem

chegar às anomalias da gravidade e, com estas, é possível o cálculo das componentes do desvio da vertical e das ondulações do geóide (GEMAEL, 1999).

As ondulações do geóide são determinadas utilizando as anomalias  $\Delta g$ . Na determinação do geóide, inclui-se ainda a determinação do desvio da vertical em suas componentes  $\xi$  e  $\eta$ . As redes geodésicas horizontais (conjunto de pontos com coordenadas geodésicas curvilíneas) e as redes geodésicas verticais (conjunto de pontos com altitudes ortométricas) requerem, em seus modelos, grandezas que provêm da determinação do geóide. Assim, os avanços científicos se traduzem pelo constante aprimoramento do modelo na tentativa de cada vez mais aproximá-lo da realidade.

Para que as altitudes elipsoidais ou geométricas  $h$  (referidas ao elipsóide), oriundas de levantamentos com Global Navigation Satellite Systems (GNSS), possam ser utilizadas nestas áreas, é necessário que elas sejam convertidas em altitudes “ortométricas”  $H$  (referidas ao geóide). Para isso, precisa-se conhecer a altura ou ondulação geoidal  $N$ , ou seja, a separação entre as duas superfícies de referência, o geóide e o elipsóide.

A determinação das ondulações geoidais, segundo Santos & Escobar (2000), é obtida através da aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. No sentido de um posicionamento planimétrico, a superfície do geóide não é útil, pois o

geóide é uma superfície que não está definida matematicamente. No entanto, enquanto uma superfície de nível, é ideal como referencial altimétrico e é usada para a representação da topografia terrestre e do mar.

A superfície geoidal tem sido a superfície de referência das altitudes. A solução para o problema do valor de contorno, apresentada por Stokes em 1849, possibilita a determinação das ondulações do geóide. As ondulações do geóide são definidas também como a separação entre o geóide e o elipsóide de referência em um ponto por meio do conhecimento das anomalias sobre toda a superfície da Terra, conforme Equação 1 (STOKES, 1849 *apud* LOBIANCO, 2005, p.57).

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g_S S(\Psi) \sin(\Psi) d\Psi dA \quad (1)$$

Onde:

$R$  - raio da Terra;

$G$  - constante de Newton;

$\Delta g_S$  - anomalia de gravidade no elemento de superfície;

$\Psi$  - ângulo geocêntrico, ou distância esférica entre um ponto de interesse e o ponto utilizado na integração;

$S(\Psi)$  - núcleo esférico da integral de Stokes geóide;

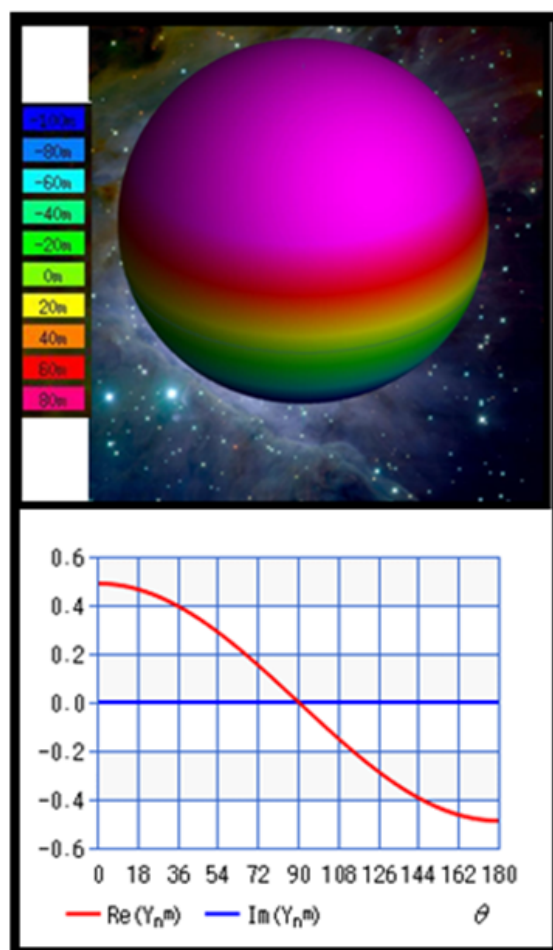
$A$  - azimuth.

O núcleo esférico de Stokes pode ser representado por uma expansão em série de Legendre. Stokes utilizou uma aproximação esférica e considerou inexistentes as massas externas à superfície equipotencial. A formulação

de Stokes para determinação das ondulações geoidais não possuía solução quando na sua apresentação, pois havia muitas áreas onde não existiam medições de gravidade. Estes locais eram principalmente nos oceanos. Na prática, a integral de Stokes era resolvida a partir do truncamento do cálculo além de uma determinada calota de integração em torno do ponto de interesse. A ondulação  $N$  é obtida pela soma da componente da ondulação geoidal calculada  $N_c$  com o erro de truncamento  $\delta N$ .

## ANÁLISE DE RESULTADOS

A representação do potencial gravitacional da Terra em função da distância e do ângulo a partir de uma simetria axial, pode ser apropriada para a escolha de uma série de harmônicos zonais. Nas Figuras 1 e 2 são feitas algumas modelagens computacionais destes zonais a partir dos harmônicos esféricos para ilustrar a variação da forma da Terra a partir da variação do grau do polinômio de Legendre utilizando uma plataforma virtual e assim serão feitas análises da variação da forma e sua conexão com o campo gravitacional terrestre. Um termo com  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 0$  é apropriado, com sua dependência de  $1/r^3$  e dependência angular radial de  $r^3$ .  $P_2(\sin\phi)$ , onde  $\phi$  representa a latitude, sendo este o termo de ordem mais baixa. Os harmônicos esféricos utilizam-se da ortogonalidade, que é uma propriedade matemática útil para os harmônicos esféricos.

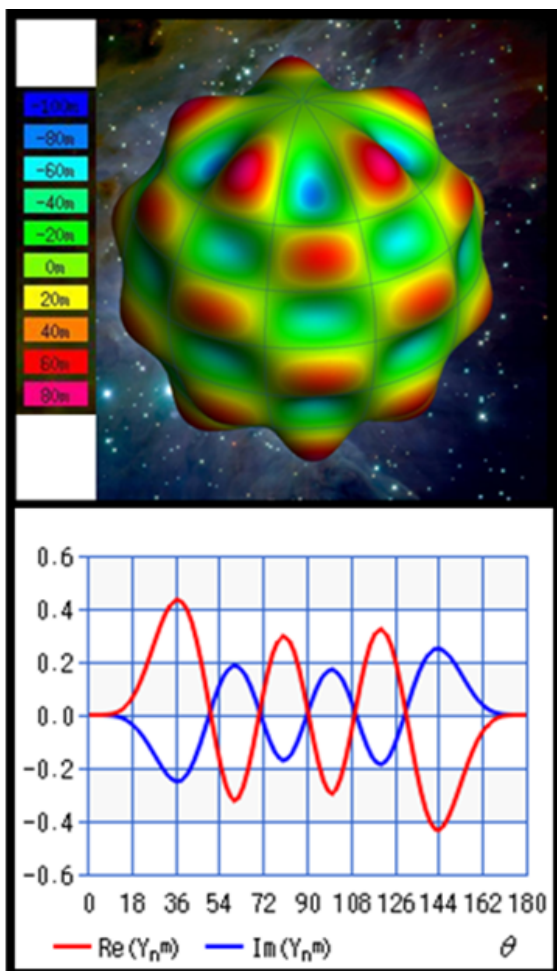


**Figura 1.** Zonais (Os harmônicos zonais possuem parâmetro  $m = 0$  e  $n = 1$ , tendo em vista que a esfera é dividida em zonas por círculos  $P_n = 0$ ).

Por meio da Figura 1, verifica-se que para o zonal  $m = 0$  onde o eixo  $v = 0$  coincide com o eixo de rotação, e tem um significado de colatitude geocêntrica e os zonais de grau  $n$  são constantes ao longo de  $n$  paralelos, estes se dividem em superfícies esféricas em zonas alternadamente positivas e negativas.

Todo potencial admite uma expansão em harmônicos esféricos como pode observado na imagem e no gráfico da Figura 1, onde mostra a variação da altitude a partir do potencial gravitacional utilizando uma linha de referência. Estes valores oscilam em torno da linha de referência geodésica

em torno aproximadamente entre - 0,5 m e + 0,5 m o que demonstra um comportamento suave para os zonais.



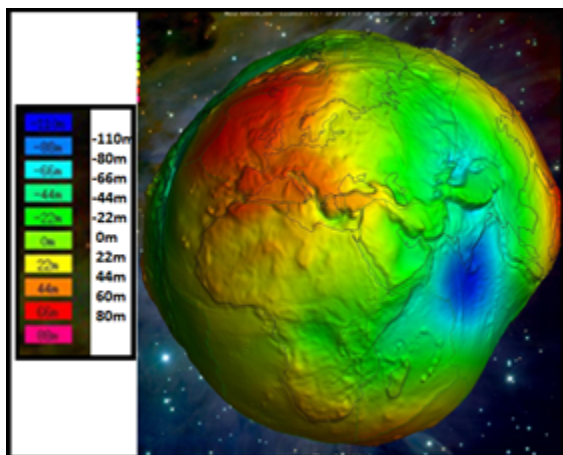
**Figura 2.** Tesseral (os harmônicos tesserais possuem parâmetros  $m = 5$  e  $l = 10$  ( $m \neq l$ ), tendo em vista que nos tesserais estão os zonais e setoriais)

A partir da Figura 2, verifica-se o tesseral que tem como condição que  $m$  seja diferente de  $n$ , assim tendo  $m = 5$  e  $n = 10$  resulta em um modelo geométrico do tesseral abaixo. Os tesserais de grau  $n$  ao longo de 2 meridianos, igualmente intervalados, dividem a superfície da esfera em quadriláteros, nos quais os tesserais assumem alternadamente valores de sinais diferentes, lembrando um mosaico denominação de zonais

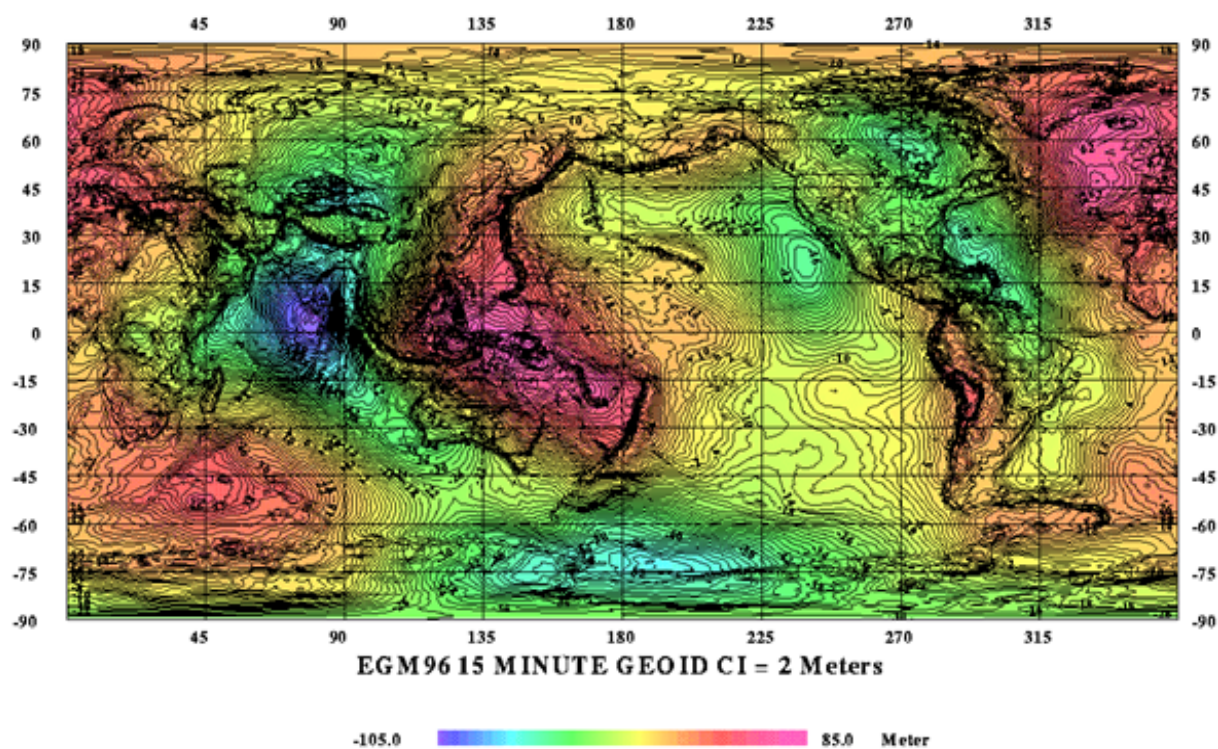
que mostram a variação das funções harmônicas esféricas que têm como uma de suas metas determinar a forma de um objeto a partir das medidas do potencial gravitacional.

A Figura 2 também mostra que para o setorial  $m = 5$  e  $n = 10$ , para uma função de Legendre em harmônicos esféricos, o seu comportamento oscila entre um máximo de +0,4 m e um mínimo de -0,4 m em lados opostos de uma forma assimétrica, variando a amplitude e descrevendo um comportamento oscilatório, o que se harmoniza com seu tesseral. Este valores oscilam em torno da linha de referência geodésica em torno aproximadamente entre -0,4 m e +0,4 m.

As ondulações geoidais são obtidas por meio da aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. No modelo EIGEN-604 (Figura 3), a superfície do geóide não é útil, pois o geóide é uma superfície que não está definida matematicamente. No entanto, sendo uma superfície de nível, é ideal como referencial altimétrico e é usada para a representação da topografia terrestre e do mar com implicações fundamentais no Sistema Vertical de Referência Global, como pode ser visto nas Figuras 3 e 4. É possível perceber a variação do campo gravitacional terrestre associado à variação da altitude, através do uso das cores e da forma morfológica da Terra para mostrar que parâmetros físicos do potencial podem ser utilizados para uma interpretação geométrica da superfície terrestre.



**Figura 3.** Modelo do geoide EIGEN-604.  
**Fonte:** <https://earth-info.nga.mil/>.



**Figura 4.** Ondulação do geoide com resolução de 2 m.  
**Fonte:** <https://earth-info.nga.mil/>.

## CONCLUSÃO

Os conceitos relacionados ao campo gravitacional da Terra real, o campo gravitacional da Terra normal, potencial perturbador, anomalia da gravidade e reduções gravimétricas

são fundamentais na elaboração da estrutura que define os passos para a determinação das ondulações geoidais e buscam a integração entre características geométricas e físicas da superfície terrestre.

As ondulações geoidais são

obtidas por meio da aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. No sentido de um posicionamento planimétrico, a superfície do geóide não é útil, pois o geóide é uma superfície que não está definida matematicamente. No entanto, sendo uma superfície de nível é ideal como referencial altimétrico e é usada para a representação da topografia terrestre e do mar com implicações fundamentais no Sistema Vertical de Referência. A modelagem computacional da equação de Stokes a partir do polinômio de Legendre nos descreve a conexão entre campo gravitacional e sua relação com a altitude da superfície terrestre.

em: 2 de maio de 2022.

STOKES, G. G. **On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth.** *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 8, p. 672-695, 1849.

## REFERÊNCIAS

CATALÃO, J. **Geodésia física.** Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa, 2000, 87p.

GEMAEL, C. **Geodésia física.** Curitiba: UFPR, 1999. 302p.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy.** Wien: Springer, 2005, 403 p.

SANTOS, N. P.; ESCOBAR, I. P. **Determinação gravimétrica do geóide na região do município do Rio de Janeiro.** In: *Scientific Electronic Library Online*. São Paulo. 2000. Disponível em <https://doi.org/10.1590/S0102-261X2000000100005>. Acesso