

---

# Polarização do Vácuo na Eletrodinâmica Quântica Escalar

## *Vacuum Polarization in Scalar Quantum Electrodynamics*

### **Leonardo Oliveira do Nascimento**

Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - *Campus* Belém. Doutor em Física - UFPA. **Endereço:** Av. Doutor Freitas, Nº 1228. Bairro: Pedreira. CEP.: 66087-810. **E-mail:** leonardo.nascimento@ifpa.edu.br.

### **Charles da Rocha Silva**

Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - *Campus* Belém. Doutor em Física - UFPA.

### **João Paulo da Silva Alves**

Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - *Campus* Belém. Doutor em Física - UFPA.

### **João Bosco Soares Pampolha Junior**

Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - *Campus* Belém. Doutor em Física - UFC.

---

## **RESUMO**

Neste trabalho é apresentado, na ordem de 1-loop, o cálculo da correção do propagador do campo eletromagnético na eletrodinâmica quântica escalar. Nesta teoria, que é uma versão mais simples da eletrodinâmica usual, o campo de matéria bosônico interage com o campo de radiação mediante a um acoplamento mínimo. Este cálculo é conhecido na literatura como tensor de polarização do vácuo e fornece a correção da carga elétrica do modelo.

**Palavras-chave:** Eletrodinâmica Quântica Escalar. Tensor de Polarização do Vácuo. Carga Elétrica.

## **ABSTRACT**

*In this work is presented, in the order of 1-loop, the calculation of the correction to the propagator of the electromagnetic field in the scalar quantum electrodynamics. In this theory, which is a simpler version of the usual electrodynamics, the bosonic matter field interacts with the radiation field through a minimal coupling. This calculation is known in the literature as the vacuum polarization tensor and provides the charge correction for the electric charge.*

**Keywords:** *Scalar Quantum Electrodynamics. Vacuum Polarization Tensor. Charge Electrical.*

## INTRODUÇÃO

Apesar de ser uma teoria fisicamente limitada, devido ao fato de não existirem na natureza partículas elementares que sejam escalares e carregadas. A eletrodinâmica quântica escalar (EDQE) funciona como um “toy model” da eletrodinâmica quântica (EDQ) usual proposta por Feynman, Schwinger e Tomonaga (GREINER; REINHARDT, 2009).

A partir deste modelo mais simples de interação entre campos de matéria e de radiação. É possível estudar de maneira simplificada alguns aspectos fundamentais da EDQ, como as simetrias do modelo e os métodos de regularização (SCHWARTZ, 2014).

Na EDQE temos matéria acoplada a partículas de spin-1 sem massa, isto implica automaticamente na existência de antipartículas, que são partículas de massa idêntica e carga oposta ( $+e$  e  $-e$ ) (SCHWARTZ, 2014).

Historicamente, foi a partir da equação Dirac que surgiu o conceito de antipartículas. Em 1931, Dirac previu que deveria haver uma partícula exatamente como o elétron, exceto pela carga oposta. No ano de 1932, o pósitron (a antipartícula do elétron) foi descoberto por Anderson, confirmando a previsão de Dirac (SCHWARTZ, 2014).

Assim como a EDQ usual, a EDQE sofre com problemas de divergências. A origem matemática do problema ocorre nos cálculos perturbativos quando se calcula as correções radiativas (diagramas com

loops) de uma determinada função de Green (GOMES, 2015; RYDER, 1996).

O objetivo deste trabalho é calcular a correção de primeira ordem (1-loop) para o propagador do campo eletromagnético (função de Green de dois pontos) conhecida na literatura como tensor de polarização do vácuo. Bem como, apresentar de maneira qualitativa a interpretação física do resultado (em analogia a EDQ usual) que está associada a correção da carga elétrica das partículas de matéria (PESKIN, 1996; KAKU 1993).

O sistema de unidades utilizado nos cálculos é o sistema de unidades naturais (SUN), no qual a velocidade da luz e a constante de Planck são grandezas adimensionais ( $c = \hbar = 1$ ). Desta maneira, espaço ( $L$ ) e tempo ( $T$ ) possuem a mesma dimensão e ambos possuem dimensão inversa de massa ( $M$ ), logo  $L = T = M^{-1}$  (NETO, 2017).

Nas próximas seções serão apresentados o modelo, suas principais características e as regras de Feynman necessárias para obtenção do tensor de polarização.

## MODELO

A densidade de lagrangiana da EDQE é dada pela equação (1) (SCHWARTZ, 2014).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\phi|^2 - m|\phi|^2. \quad (1)$$

Sendo a derivada covariante definida por  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  (acoplamento mínimo) e o tensor do campo eletromagnético dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

A partir da definição de  $D_\mu$  é possível reescrever  $\mathcal{L}$  de acordo com a equação (2).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I. \quad (2)$$

As densidades de lagrangiana  $\mathcal{L}_{KG}$  (Klein-Gordon),  $\mathcal{L}_M$  (Maxwell) e  $\mathcal{L}_I$  (interação) são expressas, respectivamente, pelas equações (3), (4) e (5).

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m \phi \phi^*. \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2. \quad (5)$$

No qual  $\mathcal{L}_1$  representa o primeiro tipo de vértice da teoria e  $\mathcal{L}_2$  o segundo. Suas expressões são dadas pelas equações (6) e (7).

$$\mathcal{L}_1 = ieA^\mu (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi). \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A^\mu A_\mu \phi \phi^*. \quad (7)$$

Sendo  $A_\mu$  o campo eletromagnético e  $\phi$  (ou  $\phi^*$ ) o campo escalar carregado. A interação entre os campos é acoplada pela carga elétrica  $e$  e  $m$  representa a massa do campo escalar.

Uma característica importante que pode ser observada a partir da equação (1), é que o modelo é invariante por uma transformação de fase local nos campos dada pelas equações (8), (9) e (10) (DAS, 2020).

$$\phi(x) \rightarrow \phi' = e^{-i\theta(x)} \phi. \quad (8)$$

$$\phi^*(x) \rightarrow \phi'^* = \phi^* e^{i\theta(x)}. \quad (9)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial_\mu \theta(x)}{e}. \quad (10)$$

Sendo  $\theta(x)$  o parâmetro de transformação, que é uma função local das coordenadas do espaço-tempo. Desta forma, realizando as mudanças nos campos é possível chegar na equação (11).

$$\mathcal{L}(\phi', \phi'^*, A'_\mu) = \mathcal{L}(\phi, \phi^*, A_\mu). \quad (11)$$

Pela análise dimensional das equações (6) e (7) é possível notar que a dimensão da constante de acoplamento em unidade de massa é  $[e] = (4 - D)/2$ , sendo  $D$  a dimensão do espaço-tempo. Para  $D = 4$  o modelo é renormalizável, uma vez que a constante de acoplamento será adimensional. Para valores de  $D > 4$  a teoria sempre será não renormalizável, pois a constante de acoplamento terá dimensão negativa. Para  $D < 4$  a teoria será super renormalizável, neste caso a constante de acoplamento terá dimensão positiva (GOMES, 2015; KAKU, 1993).

Neste trabalho os cálculos serão realizados em  $D = 4$ .

Para uma revisão dos conceitos de renormalização em modelos com campos de matéria fermiônicos ver Nascimento; Nascimento; Cunha (2020) e Cunha et. al (2021).

Na seção seguinte serão apresentadas as regras de Feynman para EDQE e os diagramas que

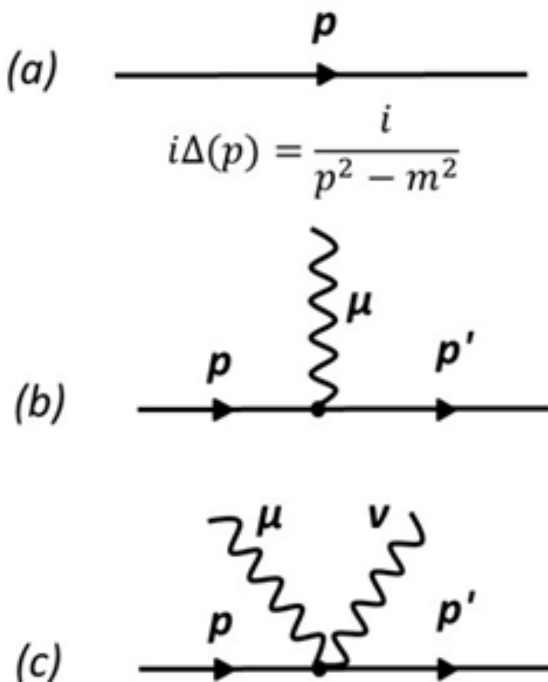
contribuem para polarização do vácuo em 1-loop.

## REGRAS DE FEYNMAN

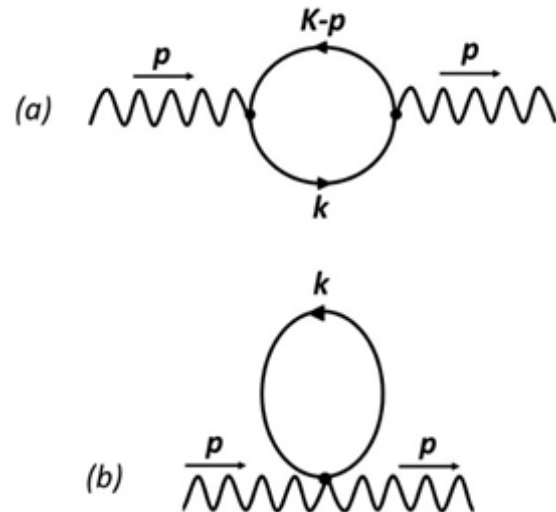
Como o objetivo do trabalho é determinar a correção ao propagador do campo eletromagnético  $-ig_{\mu\nu}/p^2$  (tensor de polarização) em 1-loop, ou seja, em primeira ordem de perturbação, não se faz necessário o uso de todas as regras de Feynman da EDQE.

As regras que serão utilizadas no cálculo do tensor de polarização são apresentadas na Figura 1 (GREINER; REINHARDT, 2009).

Os diagramas que devem ser calculados para obtenção do tensor de polarização em 1-loop são aqueles representados na Figura 2 (SCHWARTZ, 2014).



**Figura 1.** Regras de Feynman para EDQE: (a) propagador do campo escalar; (b) vértice de interação tri-linear e (c) vértice de interação quadri-linear.



**Figura 2.** Diagramas para correção do propagador do campo eletromagnético na EDQE: (a) associado ao vértice de interação tri-linear e (b) associado ao vértice de interação quadri-linear.

Na próxima seção serão apresentados os cálculos dos dois diagramas que contribuem para a polarização do vácuo na EDQE. Esses cálculos serão realizados para um espaço-tempo quadridimensional e o método de regularização utilizado será o da regularização dimensional ('tHOOFT; VELTMAN, 1972).

Para uma revisão do método da regularização dimensional em um modelo mais simples ver Nascimento et. al (2020).

## TENSOR DE POLARIZAÇÃO

Para o cálculo do tensor de polarização é necessário aplicar as regras de Feynman apresentadas na figura 1 nos diagramas da figura 2. Desta maneira, encontra-se que as amplitudes dos diagramas a e b são dadas pelas equações (12) e (13) (SCHWARTZ, 2014).

$$I_a = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(2k^\mu - p^\mu)}{(k-p)^2 - m^2} \times \frac{i(2k^\nu - p^\nu)}{(k-p)^2 - m^2}. \quad (12)$$

$$I_b = 2ie^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2}. \quad (13)$$

Somando  $I_a + I_b$  obtemos a expressão completa do tensor de polarização representada por  $i\pi^{\mu\nu}$  e expressa na equação (14).

$$i\pi^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Num}{Den}. \quad (14)$$

No qual o denominador é dado por  $Den = [(k-p)^2 - m^2][k^2 - m^2]$  e o numerador como  $Num = (2k^\mu - p^\mu)(2k^\nu - p^\nu) - 2g^{\mu\nu}[(k-p)^2 - m^2]$ .

Como a integral da equação (14) varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ , termos proporcionais a  $k^\mu$  são nulos.

Logo,  $Num = 4k^\mu k^\nu + p^\mu p^\nu - 2g^{\mu\nu}[(p-k)^2 - m^2]$  e  $Den = [(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]$ .

Usando o truque de Feynman dado pela equação (15) (GOMES, 2015; RYDER, 1996) na equação (14).

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[A + (B-A)x]^2}. \quad (15)$$

Observando que  $A = (p-k)^2 - m^2$  e  $B = k^2 - m^2$ . A equação (14) passa a ser escrita de acordo com a equação (16).

$$\pi^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{Num}{Den^2}. \quad (16)$$

No qual  $Num = -4k^\mu k^\nu - p^\mu p^\nu + 2g^{\mu\nu}[(p-k)^2 - m^2]$  e  $Den = [k-p(1-x)]^2 + px(1-x) - m^2$ .

Fazendo uma mudança de variável do tipo  $k \rightarrow k + p(1-x)$  na equação (16) (SCHWARTZ, 2014), chega-se na equação (17).

$$\pi^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{Num}{Den^2}. \quad (17)$$

Sendo  $Num = -4k^\mu k^\nu + 2g^{\mu\nu}[(xp-k)^2 - m^2] - p^\mu p^\nu[4(1-x)^2 + 1]$  e  $Den = k^2 + px(1-x) - m^2$ .

Para utilização da regularização dimensional, devem ser feitas as mudanças  $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{D} k^2 g^{\mu\nu}$  e  $e \rightarrow \mu^{\frac{4-D}{2}} e$  e na equação (17) (SCHWARTZ, 2014). Desta forma, obtemos a equação (18).

$$\pi^{\mu\nu} = \pi_1 g^{\mu\nu} + \pi_2 p^\mu p^\nu. \quad (18)$$

Os termos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são dados, respectivamente, pelas equações (19) e (20).

$$\pi_1 = 2ie^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - \Delta]^2} \times \left\{ \left(1 - \frac{2}{D}\right) k^2 + x^2 p^2 - m^2 \right\}. \quad (19)$$

$$\pi_2 = -ie^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - \Delta]^2} \times \{4(1-x)^2 + 1\}. \quad (20)$$

Com  $\Delta = m^2 - px(1-x)$ .

O próximo passo do cálculo é resolver a integral em  $k$  nas equações (19) e (20). Para tanto, é necessário o uso das integrais dimensionais dadas pelas equações (21) e (22)

(SCHWARTZ, 2014).

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{[k^2 - \Delta]^2} = -\frac{D}{2} \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 - D/2)}{\Delta^{1-D/2}}. \quad (21)$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - \Delta]^2} = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{\Delta^{2-D/2}}. \quad (22)$$

Aplicando as equações (21) e (22) na equação (19). E utilizando a relação entre as funções gamas  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ , obtemos a equação (23).

$$\pi_1 = \frac{-2e^2 \mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx \times C. \quad (23)$$

Sendo o termo C da integral da equação (23) dado por  $C = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{D}{2}} + (x^2 p^2 - m^2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}}$ .

Notando que  $x^2 p^2 - m^2 = x(2x-1)p^2 - \Delta$  a equação (23) pode ser simplificada, assim encontra-se a equação (24).

$$\pi_1 = \frac{-2e^2 \mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) p^2 \int_0^1 dx \times x(2x-1) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}}. \quad (24)$$

Como tensor de polarização é transversal, ou seja,  $p_\mu \pi^{\mu\nu} = 0$ , verifica-se que  $\pi_2 = -\pi_1/p^2$  (SCHWARTZ, 2014). Desta forma o resultado da

equação (20) é dado de acordo com a equação (25).

$$\pi_2 = \frac{2e^2 \mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx \times x(2x-1) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}}. \quad (25)$$

Substituindo os resultados das equações (24) e (25) na equação (18), obtemos a equação (26).

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{-2e^2 \mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \times \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) x(2x-1) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}}. \quad (26)$$

Aplicando a redução dimensional  $D = 4 - \epsilon$  no limite que  $\epsilon \rightarrow 0$  na integral da equação (26). E utilizando as expansões em série de Taylor  $\Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma$  e  $a^{\epsilon/2} = 1 + \ln a \epsilon/2$ , sendo  $a = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}/\Delta$ . Após uma pequena álgebra obtemos a equação (27).

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{-e^2}{8\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \times x(2x-1) \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\bar{\mu}^2}{\Delta}\right) \right\}. \quad (27)$$

No qual define-se  $\bar{\mu}^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$ , sendo  $\gamma$  o número de Euler.

Para facilitar o cálculo da integral da equação (27), consideraremos que  $Q^2 = -p^2$  e  $Q \gg m$ . Desta maneira, a equação (27) se reduz a equação (28).

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{-e^2}{8\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \times (2x$$



$$-1) \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\bar{\mu}^2}{Q^2 x(1-x)} \right) \right\}. \quad (28)$$

Após a resolução da integral em  $x$  da equação (28), obtemos a equação (29).

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{-e^2}{48\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \times \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\bar{\mu}^2}{Q^2} \right) + \frac{8}{3} \right\}. \quad (29)$$

O resultado da equação (29) corresponde ao tensor de polarização do vácuo na EDQE.

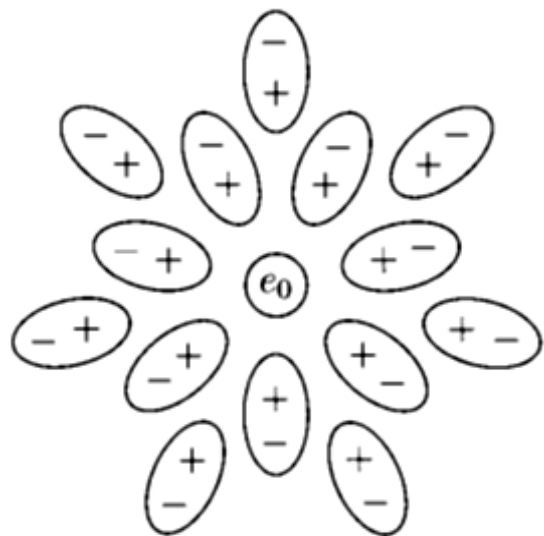
## ANÁLISE DO RESULTADO

A equação (29) apresenta a solução do tensor de polarização para EDQE obtido via regularização dimensional, sendo sua divergência presente no termo  $1/\epsilon$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Por se tratar de um termo divergente, a partir da expressão (29) não podemos obter nenhuma medida física. A priori, deveríamos eliminar esses infinitos usando a técnica de renormalização. Para a seguir podermos calcular os observáveis físicos da teoria em questão (SCHWARTZ, 2014).

Como citado no início do trabalho, a EDQE é uma teoria fisicamente limitada. Por isso, para um entendimento mais preciso de como a matéria interage com a radiação, é necessário considerarmos a EDQ usual. Sendo nessa teoria, a matéria um campo fermiônico.

Durante os processos de espalhamentos representados na figura

2, a partícula de matéria de carga elétrica  $e_0$  fica rodeada por pares virtuais elétron-pósitron que “blindam” sua carga efetiva. Quando essas partículas virtuais são geradas, o vácuo torna-se um meio com características dielétricas (PESKIN, 1996). Este fenômeno é conhecido na literatura como polarização do vácuo, ver Figura 3.



**Figura 3.** A geração de pares virtuais elétron-pósitron faz o vácuo torna-se um meio dielétrico, o qual aparentemente diminui o valor da carga elétrica  $e_0$  do férmion.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado uma revisão teórica do fenômeno da polarização do vácuo na EDQE.

Apartir desta versão mais simples da EDQ usual foram apresentados alguns conceitos fundamentais presentes nas teorias quânticas de campos, como: localidade, contagem de potências, renormalizabilidade, regras de Feynman e o uso da técnica de regularização dimensional no cálculo

do tensor de polarização.

Outro ponto importante discutido no trabalho, foi a interpretação física do tensor de polarização do vácuo. Este resultado está associado a renormalização da carga elétrica das partículas de matéria da EDQE. E pode ser interpretado em analogia aos resultados obtidos na EDQ usual, no qual a partir do vácuo são geradas partículas virtuais que “blindam” a carga original da partícula de matéria.

Outros estudos que podem ainda ser feitos usando a EDQE são: a correção do propagador do campo escalar e a correção do vértice da teoria. Nestes dois exemplos, para obtenção correta dos resultados, deve-se fazer a adição do termo de interação  $\lambda\phi^4$  a densidade de lagrangiana da equação (2).

## REFERÊNCIAS

CUNHA, William Santos; NASCIMENTO, Leonardo Oliveira do; ALVES, João Paulo da Silva; SILVA, Charles da Rocha. **Modelo de Gross-Neveu**. *Revista Engrenagem* Nº21 (2021).

DAS, A. **Lectures on Quantum Field Theory**. World Cientifica Publishing Co. Pte. Ltd. 2020.

GOMES, Marcelo Otávio Caminha. **Teoria Quântica dos Campos**. 2ª Edição. Editora da Universidade de São Paulo. 2015.

GREINER, Walter; REINHARDT, Joachim. **Quantum Electrodynamics**. Four Edition. Springer. 2009.

KAKU, M. **Quantum Field Theory: A Modern Introduction**. Oxford University Press. 1993.

NASCIMENTO, Leonardo; MORAES JR, Alcemiro Paes de; DIAS, Gustavo Augusto Nogueira; COSTA, Marcos Adriano Barros. **Métodos de Regularização Aplicados a Teoria do Campo Escalar**. *Revista Engrenagem* No19 (2020).

NASCIMENTO, Leonardo Oliveira do; NASCIMENTO, Leandro Oliveira do; CUNHA, William Santos. **Interações de Quatro Férmions**. *Revista Engrenagem* No20 (2020).

NETO, João Barcelos. **Teoria de Campos e a Natureza - Parte Quântica**. 1ª Edição. Livraria da Física. São Paulo. 2017.

PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. Addison Wesley Publishing Company. 1996.

RYDER, Lewis H. **Quantum Field Theory**. Second Edition. Cambridge University Press. New York. 1996.

SCHWARTZ, Matthew D. **Quantum Field Theory and Standar Model**.



Second Edition. Cambridge University Press. New York. 2014.

'tHOOFT, G.; VELTMAN, M.  
**Regularization and renormalization of gauge fields.** Nuclear Physics B, Vol. 44, 189-213. 1972.